Bemerkungen zum Kleeneschen Aussagenkalkül※

By

Kempatiro $\bar{\text{O}}$HASI

In Folgenden wollen wir für jedes der Postulate des von Kleene aufgenommenen folgenden Aussagenkalkuls [1] ihre Unabhängigkeiten von übrigen Postulaten erweisen.

Postulate des Kleeneschen Aussagenkalkül

1a	$A\supset(B\supset A)$
1b	$(A\supset B)\supset((A\supset(B\supset C))\supset(A\supset C))$
2	$\dfrac{A \quad A\supset B}{B}$
3	$A\supset(B\supset A\&B)$
4a	$A\&B\supset A$
4b	$A\&B\supset B$
5a	$A\supset A\vee B$
5b	$B\supset A\vee B$
6	$(A\supset C)\supset((B\supset C)\supset(A\vee B\supset C))$
7	$(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$
8	$\neg\neg A\supset A$

In b), neben diesen Unabhängigkeiten beweisen wir die Unvertretbarkeit des Postulats 1b durch ander einfacheren 1b′ ;

1b′ $\quad (A\supset B)\supset((B\supset C)\supset(A\supset C))$

$\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$ können als Arten mehrwertigen Wahrheitsfunktionen in einem endlichen Variablenbereich aufgefasst werden. Hierdurch erhalt jedes Postulat, wenn für die Aussagenvariablen Elemente des Bereichs eingesetzt werden, einen bestimmten Wert. Das Postulat heisst "gilt", wenn dieser Wert immer ein "designierte" ist. Die Wahrheitsfunktionen sind so gebildet, dass in jeder von ihnen ein Postulat nicht, die andern aber samtlich gelten.

a) Die Unabhängigkeit des Postulats 1a

Wir konstruieren die Wahrheitsfunktionen definierenden Matrizen für $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$, und annehmen 0, 1, 3 als die designierte Werte.

※ Contribution from the Shimonoseki College of Fisheries No. 250

$A \supset B$

$B \backslash A$	0	1	2	3
0	0	0	1	2
1	1	1	1	1
2	2	2	3	2
3	3	3	3	1

$A \& B$

$B \backslash A$	0	1	2	3
0	0	1	2	1
1	1	1	2	1
2	2	2	2	2
3	1	1	2	3

$A \vee B$

$B \backslash A$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

$\neg A$

A	0	1	2	3
$\neg A$	1	0	3	2

1a gilt nicht, denn $0 \supset (3 \supset 0) = 0 \supset 2 = 2$.

In folgenden Unabhängigkeitsbeweisen von b) bis k) der designierte Wert ist 0.

b) Die Unabhängigkeit des Postulats 1b.

Die Matrizen für $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$.

$A \supset B$

$B \backslash A$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	0
2	2	1	0

$A \& B$

$B \backslash A$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

$A \vee B$

$B \backslash A$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	1
2	0	1	2

$\neg A$

A	0	1	2
$\neg A$	2	1	0

1b gilt nicht, denn $(1 \supset 1) \supset ((1 \supset (1 \supset 2)) \supset (1 \supset 2)) = 1$

Die Unvertretbarkeit des Postulats 1b durch 1b′.

In b) 1b′ gilt. Damit erhalten wir die Unvertretbarkeit des Postulats 1b durch 1b′

c) Die Unabhängigkeit des Postulats 2.

Die Matrizen für $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$;

$A \supset B$

$B \backslash A$	0	1
0	0	0
1	0	0

$A \& B$

$B \backslash A$	0	1
0	0	1
1	1	1

$A \vee B$

$B \backslash A$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\neg A$

A	0	1
$\neg A$	1	0

2 gilt nicht, denn $0 \supset 1 = 0$

d) Die Unabhängigkeit des Postulats 3.

Die Matrizen für $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$;

$A \supset B$

$B \backslash A$	0	1
0	0	0
1	1	0

$A \& B$

$B \backslash A$	0	1
0	1	1
1	1	1

$A \vee B$

$B \backslash A$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\neg A$

A	0	1
$\neg A$	1	0

3 gilt nicht, denn $0 \supset (0 \supset 0 \& A) = 1$.

Bei allen Unabhängigkeitsbeweisen von b) bis i) die Matrizen für $\supset$, $\neg$ ungeändert bleiben.

e) Die Unabhängigkeit des Postulats 4a.

$A \& B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	1	1

$A \vee B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	0	1

4a gilt nicht, donn $1 \& 0 \supset 1 = 1$

f) Die Unabhängigkeit des Postulats 4b.

$A \& B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	1
1	0	1

$A \vee B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	0	1

4b gilt nicht, denn $0 \& 1 \supset 1 = 1$.

g) Die Unabhängigkeit des Postulats 5a.

$A \& B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	1	0

$A \vee B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	1	1

5a gilt nicht, denn $0 \supset 0 \vee 1 = 1$.

h) Die Unabhängigkeit des Postulats 5b.

$A \& B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	1
1	1	1

$A \vee B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	1
1	0	1

5b gilt nicht, denn $0 \vee \supset 1 \;\, 0 = 1$

i) Die Unabahängigkeit des Postulats 6.

$A \& B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	1
1	1	1

$A \vee B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	0	0

6 gilt nicht, denn $(1 \supset 1) \supset ((1 \supset 1) \supset (1 \vee 1 \supset 1)) = 1$

j) Die Unabhängigkeit des Postulats 7

Die Matrizen für $\supset$, $\&$, $\vee$, $\neg$.

$A \& B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	1
1	1	1

$A \vee B$

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	0	1

$A \supset$ b

$B \diagdown A$	0	1
0	0	0
1	1	0

$\neg A$

$A\neg$	0	1
A	0	1

7 gilt nicht, denn $(1 \supset 1) \supset ((1 \supset \neg 1) \supset \neg 1) = 1$

k) Die Unabhängigkeit des Postulats 8.

Die Matrizen für $\supset$, &, $\vee$, bleiben ungeändert.

$\neg A$		
A	0	1
$\neg A$	0	0

8 gilt nicht, denn $\neg\neg 1 \supset 1 = 1$

Literature.

1) S. C. Kleene, Introduction into metamathematics, 1952.